2018학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ④	02. ⑤	03. ③	04. ①	05. ④
06. ④	07. ②	08. ②	09. ①	10. ⑤
11. ⑤	12. ②	13. ③	14. ③	15. ⑤
16. ④	17. ①	18. ②	19. ①	20. ③
21. ④	22. 15	23. 2	24. 4	25. 52
26. 34	27. 45	28. 20	29. 7	30. 16

1. **출제의도** : 벡터의 덧셈을 성분을 이용하여 할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 4)+(1,1)$

$\quad=(3,5)$

따라서 모든 성분의 합은

8이다.

정답 ④

2. **출제의도** : 삼각함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$\quad=\sin\frac{\pi}{3}$

$\quad=\frac{\sqrt{3}}{2}$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$

$=3\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}$

$=3$

정답 ③

4. **출제의도** : 두 사건이 서로 독립임을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서

$\frac{1}{9}=\frac{2}{3}\times\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

정답 ①

5. **출제의도** : 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=e^x(2x+1)+e^x\cdot2$

$\quad=e^x(2x+3)$

이므로

$f'(1)=e\times5=5e$

정답 ④

6. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 함수를 미분할 수 있는가?

정답풀이 :

$\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2+1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{3t^2+1}{2t}$$

따라서 $t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{3\times1^2+1}{2\times1}=2$$

정답 ④

7. **출제의도** : 자연수의 분할의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

8을 4개의 자연수로 분할하면

$8=5+1+1+1$
$=4+2+1+1$
$=3+3+1+1$
$=3+2+2+1$
$=2+2+2+2$

따라서 분할의 수는 5이다.

정답 ②

8. **출제의도** : 로그부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $\log_2|x-1|$의 진수조건에서

$x\neq1$

(ii) $2\log_2|x-1|\le1-\log_2\dfrac{1}{2}$

$2\log_2|x-1|\le1-(-1)$

$2\log_2|x-1|\le2$

$\log_2|x-1|\le1$

$\log_2|x-1|\le\log_2 2$

$|x-1|\le2$에서

$-1\le x\le3$

즉 정수 x의 값은

$-1, 0, 1, 2, 3$

(i), (ii)에서

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은

$-1, 0, 2, 3$

이고, 그 개수는 4이다.

정답 ②

9. **출제의도** : 이계도함수를 도함수와 미분법을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

$=f''(a)$

$=2$ ----- ㉠

한편, $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$에서

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+3)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{(x+3)^3}$$

이므로 ㉠에서

$$\frac{2}{(a+3)^3}=2$$

$(a+3)^3=1$

$a+3=1$

$a=-2$

정답 ①

10. 출제의도 : 쌍곡선의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$의 주축의 길이가 $2a$이므로

$2a=4$에서 $a=2$

또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$에서 $b=5$

따라서

$a^2+b^2=2^2+5^2=29$

정답 ⑤

11. 출제의도 : 두 벡터가 서로 평행할 조건을 이용하여 벡터를 나타낼 수 있고 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{v}+\vec{b}$가 서로 평행하므로

$\vec{v}+\vec{b}=k\vec{a}$ (k는 실수)

그러므로

$\vec{v}=k\vec{a}-\vec{b}$

$=k(3, 1)-(4, -2)$

$=(3k-4, k+2)$

이때,

$|\vec{v}|^2=(3k-4)^2+(k+2)^2$

$=10k^2-20k+20$

$=10(k-1)^2+10$

≥ 10

따라서 $|\vec{v}|^2$의 최솟값은

$k=1$일 때, 10이다.

정답 ⑤

12. 출제의도 : 정적분으로 나타내어진 관계식에서 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_1^x f(t)\,dt=x^2-a\sqrt{x}$ …… ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a$에서 $a=1$

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

따라서

$f(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

정답 ②

13. 출제의도 : 조합과 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

매일 두 팀 이상씩 공연을 해야 하므로 첫째날과 둘째날에 공연하는 팀수로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) 첫째날 2팀, 둘째날 3팀

공연하는 팀을 정하는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_3C_3=10$

이 각각에 대하여 각 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$2!\times3!=12$

그러므로 구하는 경우의 수는

$10\times24=120$

(ⅱ) 첫째날 3팀, 둘째날 2팀

공연하는 팀을 정하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_2=10$

이 각각에 대하여 각 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$3!\times2!=12$

그러므로 구하는 경우의 수는

$10\times24=120$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$120+120=240$

정답 ③

14. 출제의도 : 부분적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_2^6 \ln(x-1)\,dx$

$=\int_1^5 \ln x\,dx$

이때, $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$\int_1^5 \ln x\,dx$

$=[x\ln x-x]_1^5$

$=(5\ln5-5)-(-1)$

$=5\ln5-4$

정답 ③

15. 출제의도 : 확률의 정의와 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률을 경우로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) 같은 숫자가 적혀 있는 카드가 2장일 때

이 사건을 A라 하면 같은 숫자가 적힌 카드를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1$이고 이 각각에 대하여 이 숫자가 적힌 카드 3장 중 2장의 카드를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$이다. 이 각각에 대하여 나머지 다른 숫자가 적힌 카드를 택하는 경우의 수는 9이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2\times9}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{27}{55}$$

(ⅱ) 같은 숫자가 적혀 있는 카드가 3장일 때

이 사건을 B라 하면 같은 숫자가 적힌 카드를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{55}$$

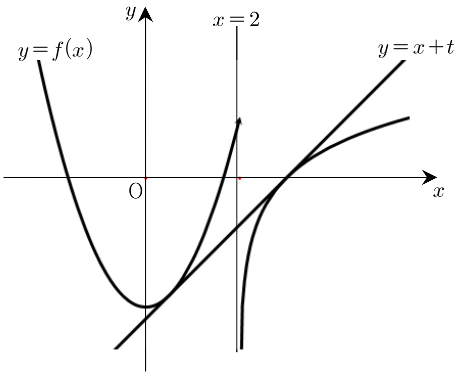
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$P(A)+P(B)=\frac{27}{55}+\frac{1}{55}=\frac{28}{55}$$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



그림과 같이 기울기가 1인 직선 $y=x+t$에 대하여 주어진 조건을 만족시키려면
곡선 $y=\ln(x-2)$에 접하고 기울기가 1인 직선이 곡선 $y=x^2+k$에 접해야 한다.

$y=\ln(x-2)$에서 $y'=\frac{1}{x-2}$이므로

곡선 $y=\ln(x-2)$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x-3$

따라서 곡선 $y=x^2+k$와 직선 $y=x-3$이 접해야 하므로

$x^2+k=x-3$에서 $x^2-x+k+3=0$

이차방정식 $x^2-x+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4(k+3)=0$에서

$k=-\frac{11}{4}$

정답 ④

17. **출제의도** : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

동전의 앞면이 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 사건을 A, 동전을 4번 던졌을 사건을 B라 하자.

이때, 사건 A가 일어나는 확률은

$\mathrm{P}(A)$

$=\frac{6}{36}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{30}{36}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3+20}{48}$

$=\frac{23}{48}$

또, 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{36}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{23}{48}}$

$=\frac{3}{23}$

정답 ①

18. **출제의도** : 속도벡터를 이용하여 점의 위치를 구하고, 두 점이 만나는 횟수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

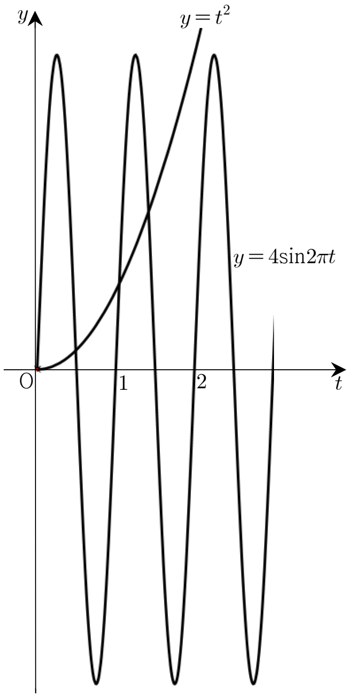
$\int 2t\,dt=t^2+C_1,$

$\int 2\pi\sin 2\pi t\,dt=-\cos 2\pi t+C_2$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치가

$(0, -1)$이므로 $C_1 = C_2 = 0$
즉 점 P의 시각 t에서의 위치는
$\mathrm{P}(t^2, -\cos 2\pi t)$
두 점 P, Q가 만나는 횟수는
연립방정식 $\begin{cases} t^2 = 4\sin 2\pi t \\ -\cos 2\pi t = |\cos 2\pi t| \end{cases}$
의 근의 개수와 같다.
방정식 $-\cos 2\pi t = |\cos 2\pi t|$을 만족시키는 t의 값의 범위는
$m + \dfrac{1}{4} \le t \le m + \dfrac{3}{4}$ …… ㉠
(단, m은 음이 아닌 정수)
한편, 방정식 $t^2 = 4\sin 2\pi t$의 근의 개수는 두 곡선 $y = t^2$, $y = 4\sin 2\pi t$이 만나는 점의 개수이다.



그림에서 두 곡선이 ㉠의 범위에서 만나는 점의 개수는 2이다.
따라서 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 2이다.

정답 ②

19. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 이항계수를 구하는 과정을 추론 할 수 있는가?

정답풀이 :
$(x+a^2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 $a^2 n$이다.
$(x^2-2a)(x+a) = x^2(x+a)^n - 2a(x+a)^n$
에서 $x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-3}의 계수와 같으므로
${}_n\mathrm{C}_{n-3} \times a^3 = \boxed{{}_n\mathrm{C}_3} \times a^3$
이고, $2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는
$2a^2 n$
이다.
그러므로
$a^2 n = \boxed{{}_n\mathrm{C}_3} \times a^3 - 2a^2 n$
이고, 이 식을 정리하면 a를 n에 관한 식으로 나타내면
$n = {}_n\mathrm{C}_3 \times a - 2n$
$$a = \frac{3n}{{}_n\mathrm{C}_3} = \frac{3n}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}} = \frac{18}{\boxed{(n-1)(n-2)}}$$
이다. 여기서 a는 자연수이고 n은 4이상의 자연수이므로 $(n-1)(n-2)$는 18의 양의 약수이어야 한다.
그러므로
$(n-1)(n-2) = 3\times2$
$n-1 = 3$
$n = \boxed{4}$
이다.
따라서, $f(n) = {}_n\mathrm{C}_3$, $g(n) = (n-1)(n-2)$, $k = 4$이므로
$f(k) + g(k)$

$= {}_4C_3 + (4-1)\times(4-2)$

$= 4+6$

$= 10$

정답 ①

20. **출제의도** : 도함수와 이계도함수를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x) = 3ae^{3x} + be^{x}$

$f''(x) = 9ae^{3x} + be^{x}$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x = \ln\frac{2}{3}$에서 변곡점을 가지므로

$f''\left(\ln\frac{2}{3}\right) = 0$

$9a\times\left(\frac{2}{3}\right)^3 + b\times\frac{2}{3} = 0$

$\frac{8a+2b}{3} = 0$에서 $b = -4a$

이때, $a>0$이므로 $b<0$이다.

한편, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하면

$f'(x) = 3ae^{3x} - 4ae^{x}$

$\quad = ae^{x}(3e^{2x} - 4)$

$f'(x) = 0$에서 $e^{2x} = \frac{4}{3}$이므로

조건 (나)에서 $e^{2m} = \frac{4}{3}$

$f(2m) = ae^{6m} - 4ae^{2m}$

$\quad = a\times(e^{2m})^3 - 4a\times e^{2m}$

$\quad = a\times\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4a\times\frac{4}{3}$

$\quad = -\frac{80}{27}a$

$-\frac{80}{27}a = -\frac{80}{9}$에서 $a=3$

따라서

$f(0) = a+b$

$\quad = a + (-4a)$

$\quad = -3a$

$\quad = -3\times3 = -9$

정답 ③

21. **출제의도** : 도함수와 미분법을 이용하여 여러 가지 도함수를 구할 수 있고 초월함수의 극한을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$F(x) = \ln|f(x)|$이므로

$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x) = 3$에서

$\lim_{x\to1}\left\{(x-1)\times\frac{f'(x)}{f(x)}\right\} = 3$ ---- ㉠

이때, $x\to0$일 때 (분자)$\to0$이므로

(분모)$\to0$에서

$\lim_{x\to1}f(x) = f(1) = 0$

또, $f'(x)$는 다항함수이므로 미분가능하다.

그러므로 ㉠에서

$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}} = 3$

이때, $f'(1)\neq0$이라 하면 위의 식의 좌변은 $\frac{f'(1)}{f'(1)} = 1$이므로 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(1) = 0$이어야 한다.

이때, $f(x) = (x-1)^2(x^2+ax+b)$ $(1+a+b\neq0)$라 하면 ㉠의 좌변은

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{2(x-1)(x^2+ax+b)+(x-1)^2(2x+a)\}}{(x-1)^2(x^2+ax+b)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2(x^2+ax+b)+(x-1)(2x+a)}{x^2+ax+b}$

$=2$

그러므로 만족시키지 않는다.

$f(x)=(x-1)^3(x+a)$ $(a+1\neq0)$이라 하면 ㉠의 좌변은

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{3(x-1)^2(x+a)+(x-1)^3\}}{(x-1)^3(x+a)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{3(x+a)+(x-1)}{x+a}$

$=3$

그러므로 만족시킨다.

따라서 $f(x)=(x-1)^3(x+a)$

한편, $\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G(x)}=\frac{1}{4}$에서

$F'(x)=\frac{3(x-1)^2(x+a)+(x-1)^3}{(x-1)^3(x+a)}$

$=\frac{3(x+a)+(x-1)}{(x-1)(x+a)}$

이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{3(x+a)+(x-1)}{(x-1)(x+a)}}{\frac{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}{g(x)\sin x}}$$

$=\lim_{x\to0}\frac{\{3(x+a)+(x-1)\}g(x)\sin x}{(x-1)(x+a)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(4x+3a-1)g(x)\sin x}{(x-1)(x+a)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$

$=\frac{1}{4}$ ------ ㉡

위에서 $x\to0$일 때, (분자)$\to0$이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}[(x-1)(x+a)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}]=0$

$ag(0)=0$

$a=0$ 또는 $g(0)=0$

$a=0$일 때,

㉡에서

$\lim_{x\to0}\frac{(4x-1)g(x)\sin x}{x(x-1)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$

$=\lim_{x\to0}\left[\frac{g(x)}{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}\times\frac{4x-1}{x-1}\times\frac{\sin x}{x}\right]$

$=\frac{1}{4}$

이때, 위의 극한값이 존재하고 극한값 $\lim_{x-1}\frac{4x-1}{x-1}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}=\frac{1}{4}$ ---㉢

이어야 한다.

$g(0)\neq0$이라 하면 위의 식의 좌변은

$\frac{g(0)}{g(0)}=1$

이므로 만족시키지 않는다.

$g(0)=0$일 때, $g(x)=x(x^2+cx+d)$ $(d\neq0)$라 하면 ㉢의 좌변은

$\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+cx+d)}{(3x^2+2cx+d)\sin x+x(x^2+cx+d)\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+cx+d}{(3x^2+2cx+d)\frac{\sin x}{x}+(x^2+cx+d)\cos x}$

$=\frac{d}{d+d}=\frac{1}{2}$

이므로 만족시키지 않는다.

그러므로 $g(x)=x^2(x+c)$ $(c\neq0)$이라 하면 ㉢의 좌변은

$\lim_{x\to0}\frac{x^2(x+c)}{(3x^2+2cx)\sin x+x^2(x+c)\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x+c}{(3x+2c)\frac{\sin x}{x}+(x+c)\cos x}$

$=\frac{c}{2c+c}$

$=\frac{1}{3}$

$g(x)=x^3$이라 하면 ⓒ의 좌변은

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^2\times \sin x+x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\times\frac{\sin x}{x}+\cos x}$$

$$=\frac{1}{4}$$

그러므로 위의 식을 만족시킨다.
그러므로

$g(x)=x^3$

이다.

만약, $a\neq 0$이고 $g(0)=0$하자.

$g(x)=x(x^2+cx+d)$ 라 하면 ⓒ에서

$$-\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\frac{(4x-3a+1)(x^2+cx+d)\sin x}{(3x^2+2cx+d)\frac{\sin x}{x}+(x^2+cx+d)\cos x}$$

$$=\frac{1}{4}$$

이때, $x\to 0$일 때, (분자) $\to 0$이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to 0$에서

$d=0$

이때, 위의 식은

$$-\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\frac{(4x-3a+1)(x+c)\sin x}{(3x+2c)\frac{\sin x}{x}+(x+c)\cos x}$$

$$=\frac{1}{4}$$

$x\to 0$일 때, (분자) $\to 0$이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to 0$에서

$c=0$

이때, 위의 식은

$$-\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\frac{(4x-3a+1)x\sin x}{3\sin x+x\cos x}$$

$$=-\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\frac{(4x-3a+1)\sin x}{3\frac{\sin x}{x}+\cos x}$$

$$=0$$

그러므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서

$f(x)=x(x-1)^3$, $g(x)=x^3$이므로

$f(3)+g(3)=24+27=51$

정답 ④

22. **출제의도** : 조합의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$${}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2$$

$$=\frac{6\times 5}{2\times 1}$$

$$=15$$

정답 15

23. **출제의도** : 도함수와 함성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\sqrt{x^3+1}$ 에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2$$

이므로

$$f'(2)=\frac{1}{2}\times(3^2)^{-\frac{1}{2}}\times 3\cdot 2^2$$

$$=2$$

정답 2

24. **출제의도** : 지수함수의 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_{2}^{4} 2e^{2x-4}dx$

$= \int_{2}^{4} 2e^{2(x-2)}dx$

$= \int_{0}^{2} 2e^{2x}dx$

$= [e^{2x}]_0^2$

$= e^4 - 1$

따라서 $k = e^4 - 1$이므로

$\ln(k+1) = \ln e^4$

$= 4$

정답 4

25. 출제의도 : 좌표평면에서 벡터로 표현된 직선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표평면 위의 점 $(6, 3)$을 지나고 벡터 $\vec{u} = (2, 3)$에 평행한 직선의 방정식은

$\frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{3}$

이 직선이 x축과 만나는 점 A의 x좌표는

$\frac{x-6}{2} = \frac{0-3}{3}$

$x = 4$

그러므로 $A(4, 0)$

또, y축과 만나는 점 B의 y좌표는

$\frac{0-6}{2} = \frac{y-3}{3}$

$y = -6$

그러므로 $B(0, -6)$

따라서

$\overline{AB}^2 = (0-4)^2 + (-6-0)^2$

$= 16 + 36$

$= 52$

정답 52

26. 출제의도 : 삼각함수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 코사인의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{OQ} = 2\cos\theta$이므로

$\overline{OP} = 2\cos\theta - 1$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 P의 y좌표는 선분 PH의 길이와 같다.

이때, $\overline{PH} = (2\cos\theta - 1)\sin\theta$

$f(\theta) = (2\cos\theta - 1)\sin\theta$로 놓으면

$f'(\theta) = -2\sin\theta \times \sin\theta + (2\cos\theta - 1)\cos\theta$

$= -2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta - \cos\theta$

$= -2(1 - \cos^2\theta) + 2\cos^2\theta - \cos\theta$

$= 4\cos^2\theta - \cos\theta - 2$

$4\cos^2\theta - \cos\theta - 2 = 0$에서

$\cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

그런데 $\frac{1}{2} < \cos\theta < 1$이므로

$\cos\theta = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$이고,

$\cos\theta = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$일 때, 점 P의 y좌표가 최대이다.

따라서 $a = 1,\ b = 33$이므로

$a + b = 1 + 33 = 34$

정답 34

27. **출제의도** : 집합의 분할을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 원소의 개수가 2인 서로 다른 두 집합을 택하는 경우는 다음 두 가지이다.

(ⅰ) 같은 원소가 1개 있는 경우

같은 원소를 택하는 경우의 수는 5이다.

이 각각에 대하여 두 집합의 원소를 1개씩 택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times \frac{1}{2!}$$

$$= 4 \times 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= 6$$

그러므로 구하는 경우의 수는

$5 \times 6 = 30$

(ⅱ) 같은 원소가 없는 경우

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times \frac{1}{2!}$$

$$= {}_5C_2 \times {}_3C_1 \times \frac{1}{2!}$$

$$= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= 15$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$30 + 15 = 45$

정답 45

28. **출제의도** : 도형을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{OD} = k\ (k > 0)$으로 놓으면

(ⅰ) $\overline{GD} = k\tan\frac{\theta}{3}$이므로

$$f(\theta) = \left(k\tan\frac{\theta}{3}\right)^2 = k^2\tan^2\frac{\theta}{3}$$

(ⅱ) $\overline{OP} = k\cos\theta$,

$$\overline{PQ} = \overline{OP}\tan\frac{2\theta}{3} = k\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}$$

이므로

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \times k\cos\theta \times k\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}$$

$$= \frac{k^2}{2} \times \cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{k^2\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta \times \frac{k^2}{2} \times \cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta \times \cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\tan^2\frac{\theta}{3}}{9 \times \frac{\theta^2}{9}} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{\cos^2\theta} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{3}{2} \times \frac{2\theta}{3}}{\tan\frac{2\theta}{3}}$$

$$= \frac{2}{9} \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

따라서 $k = \frac{1}{3}$이므로

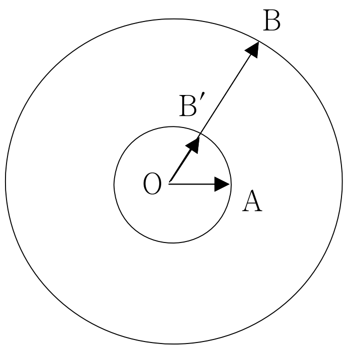
$$60k = 60 \times \frac{1}{3} = 20$$

정답 20

29. **출제의도** : 벡터의 내적의 정의와 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 선분 OB가 만나는 점을 B′이라 하고 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB'}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$라 하자.



조건 (가)에서 $\overrightarrow{OB}=3\vec{b}$이므로

$(3\vec{b})\cdot\vec{p}=3\vec{a}\cdot\vec{p}$

$\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{b}\cdot\vec{p}$ ---㉠

또, 조건 (나)에서 $|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2=20$이므로

$|\vec{a}-\vec{p}|^2+|3\vec{b}-\vec{p}|^2=20$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+9|\vec{b}|^2-6\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=20$

이때, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로

$-\vec{a}\cdot\vec{p}-3\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=5$

㉠에서 $\vec{b}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{p}$이므로 대입하면

$|\vec{p}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{p}=5$

$|\vec{p}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{p}+5$ ----㉡

한편,

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\vec{a}-\vec{p})\cdot(3\vec{b}-\vec{p})$

$=3\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{p}-3\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$

$=3\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2$--㉢

㉡을 대입하면

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3\vec{a}\cdot\vec{b}+5$

이때 위의 내적의 값이 최소가 되는 경우는 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 π일 때이고 최솟값은 2이다.

한편, ㉠에서 두 벡터 $\vec{a}, \vec{p}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0\le\theta\le\pi)$, 두 벡터 $\vec{b}, \vec{p}$가 이루는 각의 크기를 $\theta'(0\le\theta'\le\pi)$이라 하면

$|\vec{a}||\vec{p}|\cos\theta=|\vec{b}||\vec{p}|\cos\theta'$

$\cos\theta=\cos\theta'$

$\theta=\theta'$

그러므로 ㉢의 내적의 값이 최소일 때는 두 벡터 $\vec{a}, \vec{p}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$일 때이므로 ㉡에서

$|\vec{p}|^2=5$

$|\vec{p}|=\sqrt{5}$

따라서,

$m+k^2=2+(\sqrt{5})^2=7$

정답 7

30. **출제의도** : 함수의 성질과 함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

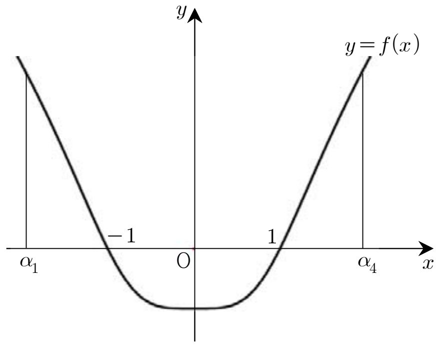
조건 (가)에서 $g'(1)=0$이므로

$f(1)=\ln2-c=0$에서 $c=\ln2$

$f(x)=\ln(x^4+1)-\ln2$

$f'(x)=\dfrac{4x^3}{x^4+1}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $-\ln 2$를 갖고,
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

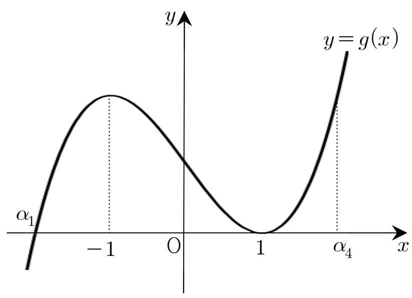


조건 (가)에서 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\alpha_1$ $(\alpha_1 < -1)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 같아지도록 α_1을 정할 수 있다.

이때, $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt=0$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 a의 값은

α_1, $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=1$, $\alpha_4=-\alpha_1$

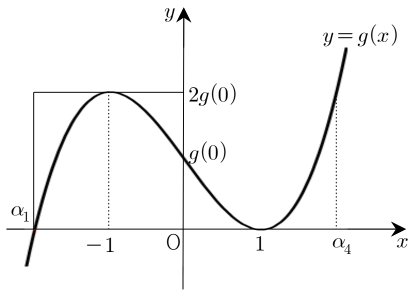
이므로 $m=4$이다.
따라서 조건을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편,

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx=\int_0^1 \{-f(x)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 \{-g'(x)\}\,dx$$
$$=\left[-g(x)\right]_0^1$$
$$=-g(1)+g(0)$$
$$=g(0)$$

즉 $g(0)=\int_0^1 |f(x)|\,dx$



$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx$의 값은 위의 그림에서 직사각형의 넓이와 같으므로

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx=(0-\alpha_1)\times 2g(0)$$
$$=-2\alpha_1\times\int_0^1 |f(x)|\,dx$$
$$=2\alpha_4\times\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

이므로 조건 (나)에서 $k=2$
따라서 $c=\ln 2$, $m=4$, $k=2$이므로
$mk\times e^c=4\times 2\times e^{\ln 2}$
$=4\times 2\times 2=16$

정답 16