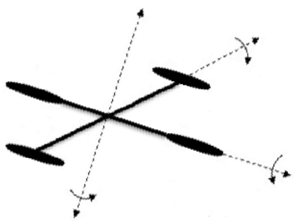
7장 Vectors

7.6 벡터공간



- 벡터공간

정의 7.5 **벡터공간**

V를 **벡터 덧셈**, **스칼라곱**(scalar multiplication)이라 하는 두 연산들이 정의된 집합이라 하자. 이때 다음 10개의 성질들을 만족시키는 V를 **벡터공간**이라 한다.

벡터 덧셈에 대한 공리

(*i*) $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$가 V 안에 있으면, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$는 V 안에 있다.

(*ii*) V 안에 있는 모든 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$에 대하여, $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$이다. (교환법칙)

(*iii*) V 안에 있는 모든 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$에 대하여, $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$이다. (결합법칙)

(*iv*) V 안에 있는 모든 $\mathbf{x}$에 대하여, $\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$인 유일한 벡터 $\mathbf{0}$이 V 안에 존재한다. (영벡터)

(*v*) V 안에 있는 각 $\mathbf{x}$에 대하여, $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=(-\mathbf{x})+\mathbf{x}=\mathbf{0}$인 벡터 $-\mathbf{x}$가 존재한다. (음벡터)

스칼라곱에 대한 공리

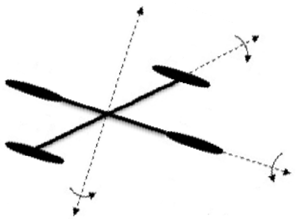
(*vi*) k가 임의의 스칼라이고 $\mathbf{x}$가 V 안에 있으면, $k\mathbf{x}$는 V 안에 있다.

(*vii*) $k(\mathbf{x}+\mathbf{y})=k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$ (분배법칙)

(*viii*) $(k_1+k_2)\mathbf{x}=k_1\mathbf{x}+k_2\mathbf{x}$ (분배법칙)

(*ix*) $k_1(k_2\mathbf{x})=(k_1k_2)\mathbf{x}$

(*x*) $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$



예제 2 벡터공간의 예

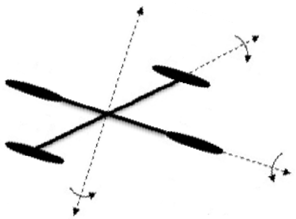
x 와 y 가 양의 실수이면 V 안에 있는 벡터들을 $\mathbf{x}=x$ 와 $\mathbf{y}=y$ 라고 쓴다. 덧셈이

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=xy$$

로 정의되고 스칼라곱은

$$k\mathbf{x}=x^k$$

으로 정의된 양의 실수들의 집합 V 를 생각하자. V 가 벡터공간인지 판단하라.



(*i*) $\mathbf{x}=x>0$, $\mathbf{y}=y>0$이므로 $\mathbf{x}+\mathbf{y}=xy>0$이다. 따라서 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$는 V 안에 있으므로 V는 덧셈에 대하여 닫혀 있다.

(*ii*) 양의 실수들의 곱은 교환적이므로, V 안에 있는 모든 $\mathbf{x}=x$와 $\mathbf{y}=y$에 대하여 $\mathbf{x}+\mathbf{y}=xy=yx=\mathbf{y}+\mathbf{x}$이다. 따라서 덧셈은 교환적이다.

(*iii*) V 안에 있는 모든 $\mathbf{x}=x$, $\mathbf{y}=y$, $\mathbf{z}=z$에 대하여

$$\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=x(yz)=(xy)z=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$$

이다. 따라서 덧셈은 결합적이다.

(*iv*) $\mathbf{1}+\mathbf{x}=1x=x=\mathbf{x}$이고 $\mathbf{x}+\mathbf{1}=x1=x=\mathbf{x}$이므로 영벡터 $\mathbf{0}$은 $\mathbf{1}=1$이다.

(*v*) $-\mathbf{x}=1/x$이라고 정의하면

$$\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=x\frac{1}{x}=1=\mathbf{1}=\mathbf{0} \text{ 그리고 } (-\mathbf{x})+\mathbf{x}=\frac{1}{x}x=1=\mathbf{1}=\mathbf{0}$$

이 되어 음의 벡터는 그 수의 역수이다.

(*vi*) k가 임의의 스칼라이고 $\mathbf{x}=x>0$이 임의의 벡터이면, $k\mathbf{x}=x^k>0$이다. 따라서 V는 스칼라곱에 대하여 닫혀 있다.

(*vii*) k를 임의의 스칼라라 하면

$$k(\mathbf{x}+\mathbf{y})=(xy)^k=x^k y^k=k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$$

(*viii*) 스칼라 k_1, k_2에 대하여

$$(k_1+k_2)\mathbf{x}=x^{(k_1+k_2)}=x^{k_1}x^{k_2}=k_1\mathbf{x}+k_2\mathbf{x}$$

(*ix*) 스칼라 k_1, k_2에 대하여

$$k_1(k_2\mathbf{x})=(x^{k_2})^{k_1}=x^{k_1k_2}=(k_1k_2)\mathbf{x}$$

(*x*) $1\mathbf{x}=x^1=x=\mathbf{x}$

정의 7.5의 모든 공리를 만족시키므로, V는 벡터공간이 된다. ❑

정의 7.6 **부분공간**

벡터공간 V의 부분집합 W가 그 자체로 V 위에서 정의된 벡터 덧셈과 스칼라곱에 대하여 벡터공간이 되면, W를 V의 부분공간(subspace)이라 한다.

정리 7.4 **부분공간에 대한 판정 기준**

벡터공간 V의 공집합이 아닌 부분집합 W가 부분공간이 되기 위한 필요충분조건은 W가 V에서 정의된 벡터 덧셈과 스칼라곱에 대해 닫혀 있을 때이다.

(*i*) $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$가 W 안에 있을 때, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$도 W 안에 있다.

(*ii*) $\mathbf{x}$가 W 안에 있고, k가 임의의 스칼라이면, $k\mathbf{x}$는 W 안에 있다.

예제 3 부분공간

f와 **g**가 전체 수직선 위에서 정의된 연속 실함수라 가정하자. 이때 미적분학에서 **f**+**g**와 임의의 실수 k에 대하여 k**f**는 연속 실함수라는 것을 알고 있다. 이것으로부터 $C(-\infty, \infty)$는 수직선 위에서 정의된 실함수들로 된 벡터공간의 부분공간이라는 것을 알 수 있다. □

예제 4 부분공간

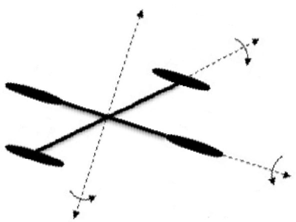
n차 이하의 다항식의 집합 P_n은 수직선 위에서 정의된 실함수들로 된 벡터공간 $C(-\infty, \infty)$의 부분공간이다. □

정의 7.7 **일차독립**

다음 조건을 만족시키는 벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$으로 된 집합을 **일차독립**(linearly independent)이라 한다. 방정식

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \tag{3}$$

을 만족시키는 유일한 상수들은 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$이다. 벡터들의 집합이 일차독립이 아니면, **일차종속**(linearly dependent)이라 한다.



정의 7.8 **벡터공간에 대한 기저**

벡터공간 V 안에 있는 벡터들로 된 집합 $B=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$을 생각하자. 이 벡터들의 집합이 일차독립이고 V의 모든 벡터들의 일차결합으로 표시될 수 있다면 집합 B를 V에 대한 **기저**라고 말한다.

정의 7.9 **벡터공간의 차원**

벡터공간의 기저에 있는 벡터의 수를 그 공간의 **차원**(dimension)이라 한다.