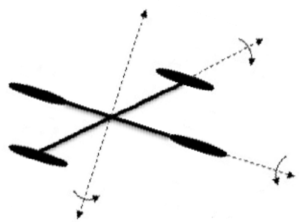
8장 Matrice -3



- 역행렬

정의 8.11 역행렬

A를 $n \times n$ 행렬이라 하자.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \tag{1}$$

인 $n \times n$ 행렬 **B**가 존재하면, 행렬 **A**를 **정칙행렬**(nonsingular matrix) 또는 **가역행렬**(invertible matrix)이라 한다. 행렬 **B**는 **A**의 **역행렬**(inverse of a matrix)이라 한다.

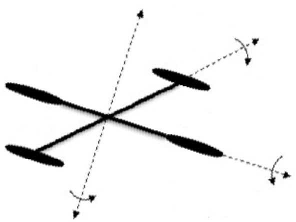
정리 8.17 역행렬의 성질

A와 **B**가 정칙행렬이라 하자.

(*i*) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

(*ii*) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

(*iii*) $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$



- 역행렬 구하기 1 – adjoint matrix를 이용한 방법

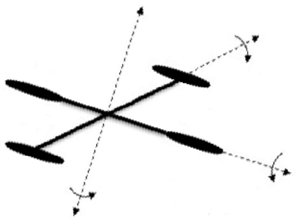
$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}}\right) \operatorname{adj} \mathbf{A}$$

정의 8.12 **딸림행렬**

A를 $n \times n$인 행렬이라 하자. **A**의 원소들에 대응하는 여인수들로 된 행렬의 전치행렬

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

을 **A**의 **딸림(수반)행렬**(adjoint matrix)이라 하고 이것을 adj **A**로 표시한다.

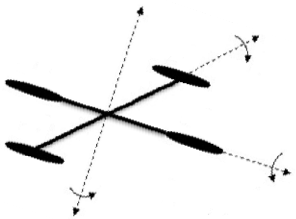


$$\mathbf{A}(\text{adj }\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det\mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \det\mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \det\mathbf{A} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} &= 0 \qquad & a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} &= 0 \\ a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + a_{23}C_{13} &= 0 \qquad & a_{21}C_{31} + a_{22}C_{32} + a_{23}C_{33} &= 0 \\ a_{31}C_{11} + a_{32}C_{12} + a_{33}C_{13} &= 0 \qquad & a_{31}C_{21} + a_{32}C_{22} + a_{33}C_{23} &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(\text{adj }\mathbf{A}) = (\det\mathbf{A}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\det\mathbf{A})\mathbf{I}$$



$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ 의 역행렬을 구하라.

풀이 $\det \mathbf{A} = 10 - 8 = 2$ 이므로, (4)로부터 다음을 얻는다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

검산

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4 & -2+2 \\ 10-10 & -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4 & 20-20 \\ -1+1 & -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ❑

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 의 역행렬을 구하라.

풀이 $\det \mathbf{A}=12$ 이므로 (5)로부터 $\mathbf{A}^{-1}$을 구할 수 있다. $\mathbf{A}$의 원소에 대응하는 여인수들은

$$C_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad C_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5 \qquad C_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-3$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-2 \qquad C_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2 \qquad C_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=6$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2 \qquad C_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-2 \qquad C_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=6$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$를 검증해 보기 바란다. ❑

정리 8.19 **정칙행렬과 det A**

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$가 정칙일 필요충분조건은 $\det \mathbf{A} \neq 0$이다.

증명 먼저 충분조건을 증명하자. $\det \mathbf{A} \neq 0$이라 가정하면, $\mathbf{A}^{-1}$은 정리 8.18로부터 구할 수 있으므로 $\mathbf{A}$는 정칙이다. 필요조건을 증명하기 위해 $\mathbf{A}$가 정칙이라 가정하고 $\det \mathbf{A} \neq 0$을 증명하여야 한다. 이제 정리 8.13으로부터 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$는

$$(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A}^{-1})(\det \mathbf{A}) = \det \mathbf{I}$$

를 의미한다. 그러나 $\det \mathbf{I} = 1$이므로, 곱 $(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{A}^{-1}) = 1 \neq 0$은 $\det \mathbf{A} \neq 0$임을 의미한다. ❑

예제 3 **특이행렬**

2×2 행렬 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$은 역행렬을 갖지 않는다. 즉 $\mathbf{A}$는 특이행렬이다. 왜냐하면 $\det \mathbf{A} = 6 - 6 = 0$이기 때문이다. ❑

Further Illustration of Theorem 2

Using (4), find the inverse of

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solution. We obtain $\det \mathbf{A} = -1(-7) - 1 \cdot 13 + 2 \cdot 8 = 10$, and in (4),

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7, \qquad C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \qquad C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -13, \qquad C_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \qquad C_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

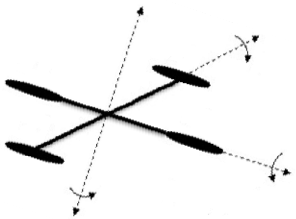
so that by (4), in agreement with Example 1,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

- 역행렬 구하기 2 – 소거법을 이용한 방법

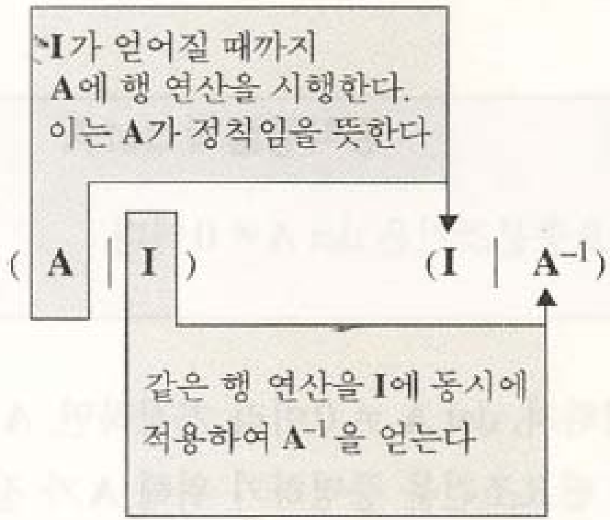
정리 8.20 **역행렬 구하기**

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$가 일련의 기본 행 연산에 의하여 $n \times n$ 단위행렬 $\mathbf{I}$로 변환될 수 있으면, $\mathbf{A}$는 정칙행렬이다. $\mathbf{A}$를 단위행렬 $\mathbf{I}$로 변환시키는 똑같은 일련의 연산은 $\mathbf{I}$를 $\mathbf{A}^{-1}$으로 변환시킨다.



$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

로 놓고 $\mathbf{A}^{-1}$을 구하는 과정은 다음 도표와 같다.



예제 4 기본 행 연산에 의한 역행렬

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 의 역행렬을 구하라.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}R_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{2R_1+R_2 \\ 5R_1+R_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\frac{1}{3}R_2 \\ \frac{1}{5}R_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{17}{10} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{-R_2+R_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{30R_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-\frac{1}{2}R_3+R_1 \\ -\frac{5}{3}R_3+R_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 17 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 6 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -8 & 17 & -10 \\ 5 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

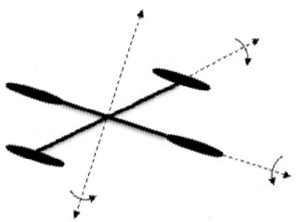
예제 5 특이행렬

행렬 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$는 역행렬을 갖지 않는다. 왜냐하면

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-2R_1+R_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-6R_1+R_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-R_2+R_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}}}_{\mathbf{A}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

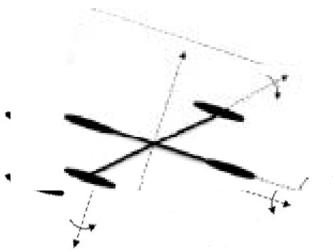
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{Row 2} + 3 \text{ Row 1} \\ \text{Row 3} - \text{Row 1} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{Row 3} - \text{Row 2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\text{Row 1} \\ 0.5 \text{ Row 2} \\ -0.2 \text{ Row 3} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Row 1} + 2 \text{ Row 3} \\ \text{Row 2} - 3.5 \text{ Row 3} \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{\begin{matrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{matrix}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Row 1} + \text{Row 2} \\ \\ \\ \end{array}$$

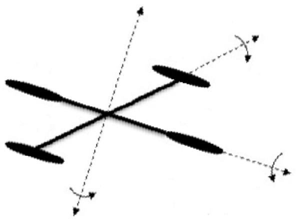


- 역행렬을 이용하여 연립방정식 풀기

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.
$$

$$
\mathbf{AX} = \mathbf{B}. \longrightarrow \boxed{\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.}
$$



계수행렬의 역행렬을 사용하여 해를 구하라.

$$2x_1 - 9x_2 = 15$$
$$3x_1 + 6x_2 = 16$$

풀이 주어진 계는

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

으로 쓸 수 있다. $\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 39 \neq 0$ 이므로, 계수행렬은 정칙이다. 따라서 (4)로부터

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

을 얻고, (7)로부터

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 234 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $x_1=6$ 이고 $x_2=-1/3$ 이다. ❑

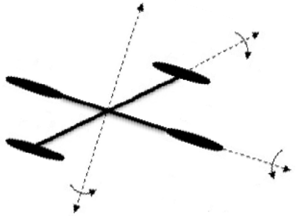
계수행렬의 역행렬을 사용하여 계의 해를 구하라.

$$\begin{aligned} 2x_1 + \qquad\quad x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -8 & 17 & -10 \\ 5 & -10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 62 \\ -36 \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $x_1=19$, $x_2=62$, $x_3=-36$이다. ❑

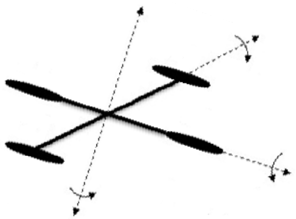


정리 8.21 자명해만 존재

n개의 미지수에 관한 n개의 선형 동차 연립방정식 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$이 오직 자명한 해만을 갖기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{A}$가 정칙인 것이다.

정리 8.22 자명하지 않은 해의 존재

n개의 미지수에 관한 n개의 선형 동차 연립방정식 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$이 자명하지 않은 해를 갖기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{A}$가 특이행렬인 것이다.



- 역행렬 구하기 3 – Cramer의 규칙

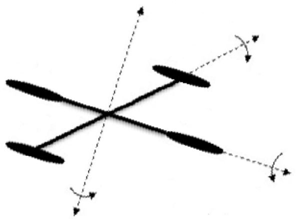
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{그리고} \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A}_k = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} & & & & k \text{ 번째 열} & & & \\ & & & & \downarrow & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,k-1} & b_1 & a_{1\,k+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,k-1} & b_2 & a_{2\,k+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,k-1} & b_n & a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$



정리 8.23 Cramer의 규칙

A를 연립방정식 (4)의 계수행렬이라 하자. det **A** $\neq 0$이면, (4)의 해는

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det \mathbf{A}_n}{\det \mathbf{A}} \tag{6}$$

이다. 여기서 $\mathbf{A}_k$, $k=1, 2, \ldots, n$은 (5)에서 정의되었다.

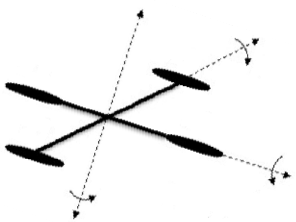
$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{pmatrix}$$

이다. 이제 마지막 행렬의 k행에 있는 원소는

$$x_k = \frac{b_1C_{1k} + b_2C_{2k} + \cdots + b_nC_{nk}}{\det \mathbf{A}} \tag{7}$$

이다. 그러나 $b_1C_{1k}+b_2C_{2k}+\ldots+b_nC_{nk}$는 k열에 따라 전개한 det A_k의 여인수 전개식이다. 여기서 $\mathbf{A}_k$는 (5)에 주어진 행렬이다. 따라서 $k=1, 2, \ldots, n$에 대하여 $x=\det \mathbf{A}_k/\det \mathbf{A}$이다.



예제 1 Cramer의 규칙을 이용하여 연립방정식 풀기

Cramer의 규칙을 이용하여 아래 연립방정식을 풀라.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\
x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\
5x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

풀이 해는 다음과 같은 4개의 행렬식의 계산을 요구한다.

$$
\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 13, \qquad \det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -39,
$$

$$
\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 78, \qquad \det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 52
$$

$$
x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = -3, \quad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = 6, \quad x_3 = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = 4
$$