Lecture Notes for
Introduction to Probability and Statistics
© 2013, Sungkuk Lim
Hanyang University, Ansan, 425-791, Korea
calltimy@hanyang.ac.kr

Probability and Statistics / 확률과 통계

강의노트 03

확률 1

21. 가능성의 법칙인 확률의 시작은 도박이었다. 도박이 언제 시작되었는지는 분명하지 않다. 로마의 클라우디우스는 최초의 도박책을 쓴 것으로 전해진다. [주사위 놀이에서 이기는 법] 이라는 그의 책은 이름만 전해지고 있다.

22. 현재의 주사위는 르네상스 시기 도박사 드 메레가 수학적 문제를 제기하면서 일반화된다. 드 메레는 친구인 파스칼에게 주사위에 관한 수학적 질문을 하게 되고 파스칼은 현재 사용되는 확률 이론을 처음으로 만들게 된다.

23. 기본정의

- 확률실험, 시행 – 우연이 지배하는 사건의 결과를 관찰하는 과정
- 근원사건 – 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과
- 표본공간 – 모든 근원사건의 집합

24. 동전던지기

- 시행 – 동전 던진 결과를 기록하는 것
- 근원사건 – 동전의 앞면, 뒷면
- 표본공간 – { 앞면, 뒷면 }

25. “1개의 주사위 던지기”

- 시행 – 주사위 던진 결과를 기록하는 것
- 근원사건 – 1, 2, 3, 4, 5, 6
- 표본공간 – {1, 2, 3, 4, 5, 6}

26. “2개의 주사위 던지기”

- 시행 – 주사위를 던져 나온 수를 합해서 기록하는 것
- 근원사건 – 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
- 표본공간 – 36개 (6x6) 로 이루어짐

{
(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)
}

27. n 개의 결과를 가지는 확률시험에서 각각의 결과를 결과1, 결과2, 결과3, …, 결과N 이라고 쓰기로 하고, 결과1이 나올 확률을 P(결과1) 이라고 쓰기로 한다.
그러면 O_1, O_2, O_3,…, O_n 의 결과에 대응하는 확률은 $P(O_1)$, $P(O_2)$, $P(O_3)$,…, $P(O_n)$ 이 된다.

28. 2개의 주사위를 굴리는 경우, 36개의 근원사건이 있고, 모두 그 가능성이 같으므로 각 확률은 .0278 (=1/36) 이다.

29. 단, 위의 결과가 나오려면 주사위에서 각각의 눈이 나오는 확률이 같아야 한다는 전제가 따른다. 다르게 말하면 1의 값이 더 잘 나오도록 납을 넣어서 만든 주사위가 있을 수도 있다. 예를 들어 1은 굴린 회수의 25%가 나온다고 하면,

✓ 시행 - 주사위 던진 결과를 기록하는 것
✓ 근원사건 - 1, 2, 3, 4, 5, 6
✓ 표본공간 - {1, 2, 3, 4, 5, 6}

으로 25번의 결과와 동일하다. 하지만 정상적인 주사위라면 1부터 6까지 눈이 나올 확률은 1/6 이 되어야 하지만 이 주사위는 다음과 같다.

$P(O_1)$	$P(O_2)$	$P(O_3)$	$P(O_4)$	$P(O_5)$	$P(O_6)$
.25	.15	.15	.15	.15	.15

※ 근원사건 모두가 같은 확률을 가질 필요는 없고, 또 그런 경우는 일반적이지도 않다.
P(내일:비) ≠ P(내일:맑음) ≠ P(내일:구름)

30. 확률 접근 방법

- 고전적 확률 - 도박에 바탕을 둔 개념, 모든 근원사건은 동일한 확률을 가진다고 가정
- 통계적 확률 - 반복 가능한 시행에서 한 사건이 일어날 확률은 오래동안 관찰할 때 그 사건이 일어날 횟수의 비율
- 개인적, 주관적 확률 - 대부분의 사건은 일상생활에서 반복적으로 일어나지 않는다. 반복적이지 않은 어떤 일에 대해 개인이 평가하는 확률(ex, 북한이 핵실험을 재개할 확률, 대학생활중 CC가 될 확률, etc.)

31. 확률의 특징

- 확률은 0과 1사이에 있다.
- 확실히 일어나는 사건은 확률이 1이다.
- 확률은 음수가 될 수 없다.
- 확률 0 은 어떤 사건이 결코 일어날 수 없음을 의미한다.
- 모든 근원사건의 확률의 합은 1이다.

32. 고전적확률(Classical Formula)

- $P[A] = \dfrac{n(A)}{n(S)}$,
- n(A) - 사건 A 가 일어날 경우의 수
- n(S) - 발생 가능한 모든 사건이 일어날 경우의 수

33. 통계적확률
(Relative Frequency Approximation)

- $P[A] \simeq \dfrac{f}{n}$
- f - 사건 A 가 발생하는 횟수
- n - 전체 실험(시행)의 횟수

34. 용어정리 1

- A', A^c : 사건 A의 여사건(complement): 사건 A에 포함되지 않은 표본공간에 속하는 모든 기본결과의 모임
- A∪B : 합사건(union) : 사건 A나 B 둘 중에 하나에 속하거나 동시에 속하는 기본결과들의 모임
- A∩B : 공통(또는 교)사건(intersection) : 사건 A와 B에 동시에 속하는 기본결과들의 모임
- ∅ : 공사건(null event, impossible event): 기본결과를 하나도 포함하지 않는 사건
- 상호배반(mutually exclusive) : 두 사건 A와 B의 교사건이 공사건
- Two events A1 and A2 are mutually exclusive *if and only if* A1 ∩ A2 = ∅. Events A1, A2, A3,... are mutually exclusive *if and only if* Ai ∩ Aj = ∅ for i≠j

35. 순열(Permutations) 과 조합(Combinations)

- 순열, nPr : 서로 다른 n개 중에서 순서를 생각하고 r개를 뽑는 경우의 수

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- 조합, nCr : 서로 다른 n개 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 뽑는 경우의 수

$${}_nC_r = C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- 계승, 팩토리얼, !

  n! = n(n-1)(n-2)⋯3·2·1
- 0! = 1
- 중복순열 nΠr : 서로 다른 n개 중에서 순서를 생각하고 중복을 허용하여 r개를 뽑는 경우의 수

$${}_n\Pi_r = n^r$$

- 중복조합 nHr : 서로 다른 n개 중에서 순서를 생각하지 않고 중복을 허용하여 r개를 뽑는 경우의 수

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

Example 1.3.7. 16개의 포트는 사용중(u)이거나 사용하지 않지만 작동가능하거나(n), 전혀 작동하지 않는(i) 세가지 중 하나의 상태가 된다. 10 u, 4 n, 2 i 가 되는 경우의 수는 총 몇 가지 인가?

(a) ${}_{16}C_{10} \cdot {}_6C_4 \cdot {}_2C_2 = \frac{16!}{10!6!}\frac{6!}{4!2!}\frac{2!}{2!} = 120,120$

동전 1개를 100번 던질 때 나오는 면의 경우의 수는?

(a) $${}_n\Pi_r = n^r$$
$$= 2^{100}$$
$$= 1267650600228229401496703205376$$

풀어볼 문제 Ch1. Exercise 5, 9, 28, 29, 32